

CONTROL DE UN SISTEMA NO LINEAL USANDO  
TÉCNICAS INTELIGENTES.  
EL PÉNDULO CON RUEDA DE REACCIÓN

VÍCTOR DANIEL CORREA RAMÍREZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
LÍNEA DE CONTROL E INSTRUMENTACIÓN  
PEREIRA  
2016

CONTROL DE UN SISTEMA NO LINEAL USANDO  
TÉCNICAS INTELIGENTES.  
EL PÉNDULO CON RUEDA DE REACCIÓN

Trabajo de Grado para Optar al Título de  
Magister en Ingeniería Eléctrica.

VÍCTOR DANIEL CORREA RAMÍREZ

Director.  
MEE. DIDIER GIRALDO BITRAGO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
LÍNEA DE CONTROL E INSTRUMENTACIÓN  
PEREIRA  
2016

Calificación:

---

PhD. Andrés Escobar Mejía  
Presidente del Jurado.

---

PhD. Eduardo Giraldo Suárez  
Jurado

---

PhD. Andrés Escobar Mejía  
Jurado

---

MEE. Didier Giraldo Buitrago  
Director

*A mis hijos Laura Marcela y Juan Esteban  
Por todas la horas que no he estado a su lado.*

*A mi familia  
Por su confianza y apoyo.*

*A Cyndi  
Por su amor y apoyo incondicional.*

*A mis estudiantes.*

# Agradecimientos

Son muchas las personas a las que debo expresar mi gratitud porque de una u otra forma influyeron positivamente en el desarrollo de este trabajo.

Al profesor Didier Giraldo, de quien adquirí todos mis fundamentos en el área de control, me facilitó un importante espacio y herramientas de trabajo, revisó minuciosamente los borradores del documento y nunca dejó de animarme para continuar. A toda mi familia por su constante apoyo, amor y confianza. A mis profesores y amigos, con quienes he compartido excelentes momentos y experiencias. A mi novia, por enseñarme a identificar las cosas importantes para mi vida y a luchar por ellas. Finalmente, pero con igual importancia, agradezco profundamente al programa de Ingeniería Eléctrica, a la Maestría en Ingeniería Eléctrica y a la Universidad tecnológica de Pereira por permitirme adquirir mi formación y experiencia profesional durante estos años.

*VíctorDC*

# Resumen

En este trabajo se analiza el problema de control para el sistema conocido como *Péndulo con Rueda de Reacción*. Se requiere el uso de técnicas no lineales debido a que el sistema debe ser llevado de su punto de equilibrio estable (abajo) a la posición inestable (arriba o invertida), lo que implica la variación de los estados en grandes rangos de operación.

En la práctica, el esfuerzo de control siempre está limitado a un rango definido por la etapa de potencia y el actuador, que en el caso analizado es un motor de corriente continua. Estos límites se deben considerar en el proceso de diseño, analizando los efectos de la saturación y los tiempos de establecimiento mínimos que se pueden lograr en la regulación o el seguimiento de una referencia.

Inicialmente se describen las características del sistema y se desarrolla un modelo matemático como punto de partida para el diseño de controladores. El control por seguimiento de una referencia se propone desde dos enfoques: Una técnica analítica (linealización por realimentación) y una inteligente (control difuso). En cada capítulo se muestran de forma detallada el proceso de diseño y los resultados obtenidos al aplicar los controladores correspondientes. El enfoque de seguimiento de referencia se adopta como una posible solución a la incapacidad práctica del motor de llevar el péndulo de forma directa a su posición invertida (por requerirse una señal de control muy por fuera de los límites).

En el capítulo 1 se describe el sistema real del cual se dispone, se desarrolla un modelo usando la mecánica de Lagrange y se realiza una validación con la frecuencia de oscilación alrededor del punto de equilibrio estable. Posteriormente se propone un modelo simplificado del motor y se analizan los valores máximos de velocidad, voltaje y corriente.

El esquema de control no lineal usando linealización por realimentación se

desarrolla en el capítulo 2. Primero se presenta un modelo general no lineal para sistemas afines de una entrada y una salida, luego se introducen la notación de cálculo vectorial y las derivadas de Lie que tienen aplicación directa en los enfoques de linealización entrada-salida y entrada-estados. Se proponen los esquemas de regulación y seguimiento de trayectoria y se van mostrando en paralelo los resultados obtenidos.

El capítulo 3 presenta el desarrollo del controlador difuso con base en un modelo de estados tipo Takagi-Sugeno para la planta y compensación distribuida paralela para combinar los reguladores que se obtienen en los diferentes puntos de operación. Se aplica el método de *linealización por no linealidad sectorial (sector nonlinearity)*, que tiene la ventaja de generar modelos de la forma  $\dot{x} = A_i x + B_i u$  a diferencia del resultado típico de la linealización de Taylor ( $\Delta\dot{x} = A_i \Delta x + B_i \Delta u$ ) con variaciones alrededor de un punto de operación. Se propone una referencia de oscilaciones con amplitud creciente y se usan reguladores reducidos en la etapa de levantamiento y un regulador completo en la posición invertida. Este último tiene el objetivo de mantener cercana a cero la velocidad de giro de la rueda. Finalmente se presentan los resultados obtenidos mediante simulación.

Este trabajo tiene los siguientes objetivos fundamentales

1. Obtener y validar un modelo dinámico no lineal del sistema.
2. Diseñar un control por seguimiento de trayectoria basado en la técnica de linealización por realimentación, teniendo en cuenta las restricciones de los estados y la señal de control.
3. Diseñar un controlador difuso que permita el seguimiento de una trayectoria, teniendo en cuenta las restricciones de los estados y la señal de control.
4. Obtener resultados prácticos y de simulación y realizar comparaciones entre las estrategias de control usadas.

# Índice general

<i>Índice general</i> . . . . .	VIII
<i>Índice de figuras</i> . . . . .	X
<b>1.. El sistema a controlar</b> . . . . .	1
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Modelo del sistema . . . . .	2
1.3. La señal de control . . . . .	5
1.4. El modelo del motor . . . . .	6
<b>2.. Control No Lineal:</b>	
<b>Linealización por Realimentación</b> . . . . .	8
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Sistemas Dinámicos No Lineales . . . . .	9
2.2.1. El péndulo con rueda de reacción . . . . .	10
2.3. Notación: Cálculo vectorial [6, 12] . . . . .	11
2.4. Linealización Entrada-Salida . . . . .	12
2.4.1. Linealización parcial para el Péndulo con Rueda de Reacción . . . . .	14
2.5. Linealización Entrada-Estados . . . . .	17
2.5.1. Linealización exacta local para el Péndulo con Rueda de Reacción . . . . .	19



<b>3.. Control Difuso:</b>	
<b>Compensación Distribuida Paralela . . . . .</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción . . . . .	23
3.2. Modelo T-S de la planta . . . . .	24
3.3. Compensación Distribuida Paralela . . . . .	27
3.4. Resultados de simulación . . . . .	29
<b>4.. Conclusiones . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>34</b>

# Índice de figuras

1.1. El Péndulo con Rueda de Reacción implementado sobre el Mechatronics Control Kit. . . . .	2
1.2. Representación esquemática del sistema. . . . .	2
1.3. Oscilaciones libres. . . . .	5
1.4. Modelo del motor. . . . .	6
2.1. Regulador de perturbaciones con linealización parcial alrededor del equilibrio estable ( $\theta_1 = \pi$ ). . . . .	16
2.2. Regulador de perturbaciones con linealización parcial alrededor del equilibrio inestable ( $\theta_1 = 0$ ). . . . .	17
2.3. Resultados del esquema de seguimiento de trayectoria. . . . .	18
2.4. Esquema de linealización exacta (entrada-estados). . . . .	21
2.5. Regulación de condiciones iniciales y perturbaciones con linealización exacta sobre el péndulo con rueda de reacción. . . .	22
3.1. No-linealidad sectorial de la función seno. . . . .	24
3.2. Izq: Funciones de pertenencia. Der: Aproximación difusa. . . . .	25
3.3. Función seno y rectas de aproximación. . . . .	26
3.4. Funciones de pertenencia para el modelo difuso. . . . .	28
3.5. Representación esquemática del sistema. . . . .	29
3.6. Trayectoria de referencia para el seguimiento. . . . .	29
3.7. Resultados del esquema de seguimiento descrito. . . . .	31

---

3.8. Velocidad de la rueda durante el seguimieno. . . . .	31
---	----

# 1

## El sistema a controlar

### 1.1 Introducción

El péndulo con rueda de reacción (RWP por sus siglas en inglés)<sup>1</sup> fue introducido inicialmente por Mark W. Spong y es una variante del péndulo invertido en la cual, un motor sujeto al extremo libre de una barra hace girar una rueda de inercia. El otro extremo de la barra es el punto de apoyo sobre el cual gira el péndulo. La rueda de inercia es simétrica con respecto a su eje de rotación; esta característica hace que el sistema sea más simple en relación con otros conocidos<sup>2</sup>, permitiendo desarrollar varias tareas de control.

El estudio de este tipo de sistemas puede justificarse por el hecho de que varios sistemas importantes en ingeniería pueden ser modelados como péndulos; entre estos se encuentran los modelos básicos de cohetes, los robots caminantes, el dispositivo de transporte *Segway*, etc. [4,10]

La figura 1.1 muestra una imagen del sistema real del cual se dispone [8]. Los sensores principales son dos encoders de alta resolución (para medir los ángulos) y el actuador es un motor DC. El control del sistema puede realizarse desde Matlab o directamente programando el DSP de la familia C6000 de Texas Instruments con que se cuenta. Los parámetros y el modelo del sistema físico se presentan en la siguiente sección.

---

<sup>1</sup> Reaction Wheel Pendulum o Inertia Wheel Pendulum

<sup>2</sup> Ejemplos de estos sistemas son el Pendubot y el Acrobot

Fig. 1.1: El Péndulo con Rueda de Reacción implementado sobre el Mechatronics Control Kit.

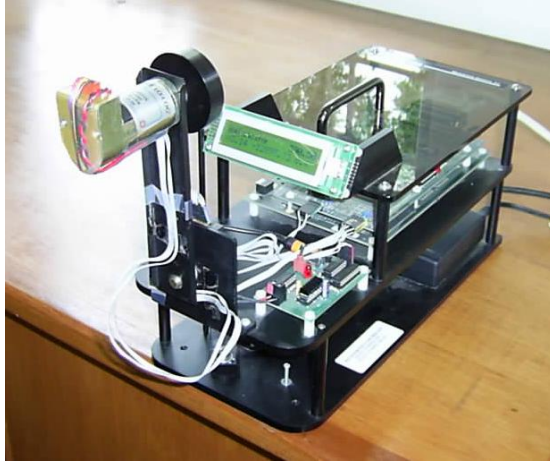
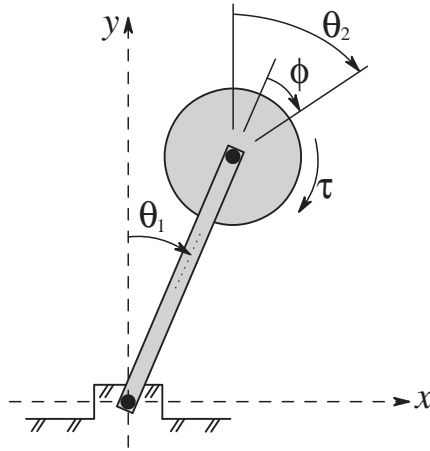


Fig. 1.2: Representación esquemática del sistema.



## 1.2 Modelo del sistema

La obtención de un modelo matemático de la planta o sistema a controlar (usando leyes físicas o algoritmos de identificación), es el paso inicial a la hora de diseñar tareas de control sobre un sistema específico. La figura 1.2 muestra una representación esquemática del péndulo con rueda de reacción. El ángulo  $\theta_1$  se mide desde la posición vertical arriba (sensor 1),  $\theta_2$  es el ángulo de la rueda con respecto a la misma referencia y  $\phi$  es el ángulo relativo entre la barra y la rueda (sensor 2).

Con base en la referencia definida, las posiciones de equilibrio del sistema son  $\theta_1 = n\pi$ , con  $n$  entero. Se tiene un equilibrio estable cuando  $n$  es impar (abajo) e inestable cuando  $n$  es par o cero (arriba) para cualquier valor del ángulo  $\theta_2$ , ya que la rueda de inercia es simétrica con respecto a su eje de rotación. Debido

a que el sensor 2 mide el ángulo relativo entre el péndulo y la rueda, el ángulo total de esta última (con respecto a la referencia vertical) se obtiene de acuerdo a la ecuación (1.1)

$$\theta_2 = \theta_1 + \phi \quad (1.1)$$

Las características del sistema están definidas principalmente por la geometría y las masas de los componentes. Los parámetros del sistema real del cual se dispone son los siguientes [8]

- $m_p = 0.216 \text{ kg}$  → Masa del péndulo.
- $m_r = 0.085 \text{ kg}$  → Masa de la rueda.
- $l_p = 0.117 \text{ m}$  → Distancia del pivote al centro de masa del péndulo.
- $l_r = 0.127 \text{ m}$  → Distancia del pivote al centro de masa de la rueda.

Debe anotarse que el péndulo está conformado por la barra y el motor fijo a ella. La distancia desde el pivote hasta el centro de masa del sistema completo puede determinarse en forma aproximada como se indica en la ecuación (1.2)

$$l = \frac{m_p l_p + m_r l_r}{m} = 0.120 \text{ m} \quad (1.2)$$

siendo  $m$  la masa combinada del péndulo y la rueda,  $m = m_p + m_r = 0.301 \text{ kg}$ . Los momentos de inercia asociados a los componentes del sistema, con respecto a su centro de masa son los siguientes [1]

- $J_p = 2.23 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  → Para el péndulo.
- $J_r = 2.49 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  → Para la rueda.

el momento de inercia total del sistema con respecto al extremo fijo de la barra (pivote) se obtiene con el teorema de los ejes paralelos como

$$J = J_p + m_p l_p^2 + m_r l_r^2 = 4.57 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Para modelar el sistema se recurre a la mecánica de Lagrange, que permite tratar con funciones escalares (de energía), evitando el manejo vectorial asociado con las leyes de Newton. Para el péndulo con rueda de reacción, las coordenadas generalizadas son los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . La energía cinética es una función de las velocidades del péndulo y la rueda (ecuación (1.3))

$$E_c(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_2^2 \quad (1.3)$$

Si no se considera la elasticidad en los componentes, la energía potencial queda definida como en la ecuación (1.4), en la que se toma como referencia la posición de equilibrio estable ( $\theta_1 = \pi$ )

$$E_p = mgl(1 + \cos \theta_1) \quad (1.4)$$

Esta energía no depende de  $\theta_2$  debido a la simetría de la rueda.

La función de Lagrange (la diferencia entre la energía cinética y la potencial) para el sistema es entonces

$$L = E_c - E_p$$

$$L = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}_2^2 - mgl(1 + \cos \theta_1) \quad (1.5)$$

El torque aplicado al sistema se obtiene del motor; sobre la rueda se obtiene un torque  $\tau$  y como reacción, un torque  $-\tau$  aparece sobre la barra. Las ecuaciones de movimiento para el sistema se obtienen según la mecánica de Lagrange [1] con las ecuaciones (1.6)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\tau \quad (1.6a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau \quad (1.6b)$$

Utilizando (1.5) y calculando las derivadas necesarias, el modelo obtenido a partir de las ecuaciones (1.6) es el que se presenta en (1.7):

$$J\ddot{\theta}_1 - mgl \sin \theta_1 = -\tau \quad (1.7a)$$

$$J_r\ddot{\theta}_2 = \tau \quad (1.7b)$$

El torque  $\tau$  puede obtenerse en función de la corriente del motor como  $\tau = ki$ , siendo  $k$  la constante de torque (dada por el fabricante). Con esto las ecuaciones (1.7) toman la forma dada en (1.8)

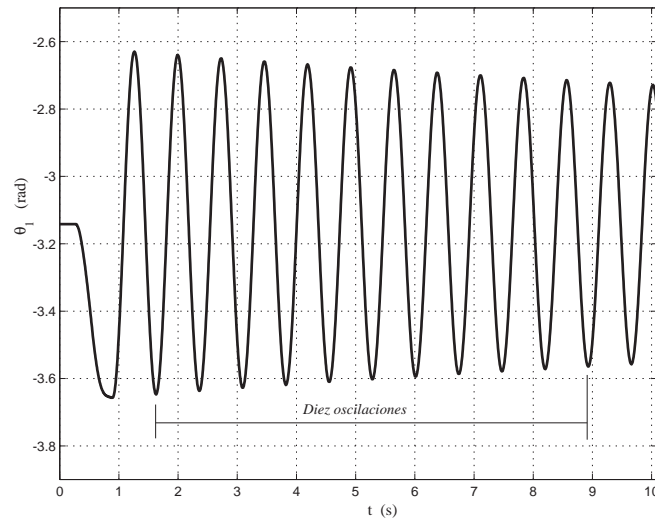
$$\ddot{\theta}_1 - \frac{mgl}{J} \sin \theta_1 = -\frac{k}{J}i \quad (1.8a)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{k}{J_r}i \quad (1.8b)$$

La constante  $mgl/J$  corresponde al cuadrado de la frecuencia de pequeñas oscilaciones ( $\omega_0$ ) del sistema alrededor de  $\theta_1 = \pi$  (posición vertical abajo). Esto se verifica fácilmente obteniendo una versión linealizada de (1.8a) en el punto de operación  $\theta_1 = \pi$  y con  $\tau = 0$ . Con los valores dados de  $m$ ,  $l$  y  $J$  y la gravedad  $g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , se obtiene el valor teórico de frecuencia:  $\omega_0 = 8.86 \text{ rad/s}$ .

Para una validación de este resultado se desarrolla el siguiente experimento: sin aplicar ninguna entrada al sistema, el péndulo se deja oscilar desde un ángulo inicial  $\theta_1(0)$  menor a 20 grados alrededor del equilibrio estable y se mide el periodo de oscilación para determinar el valor de  $\omega_0$  mediante la relación  $\omega_0 = 2\pi/T$ . La figura 1.3 muestra el resultado de dicho experimento; entre  $t = 1.63$  s y  $t = 8.93$  s se obtienen diez oscilaciones completas y por lo tanto  $T = (8.93 - 1.63)/10$  s = 0.73 s. Con lo cual  $\omega_0 = 8.607$  rad·s<sup>-1</sup>, que es un valor muy cercano al obtenido teóricamente. De esta manera se comprueba la validez del modelo obtenido.

Fig. 1.3: Oscilaciones libres.



### 1.3 La señal de control

Dado que el torque del motor se modela como proporcional a la corriente (modelo aproximado válido para un motor de imán permanente), la señal de control puede diseñarse para influir directamente sobre esta última. En la tarjeta de control se generan valores en el rango  $[-10, 10]$  UI (Unidades de Ingeniería) y por tanto puede plantearse una señal de control que sea proporcional al torque:

$$u = k_u \tau = k_u k i$$

Según datos del fabricante, el motor LO-COG8X22 tiene una constante de torque  $k = 27.4 \times 10^{-3}$  N·m·A<sup>-1</sup> y maneja una corriente máxima de 1.8 A. Si a esta corriente se asocia el valor límite de la señal de control se obtiene

$$k_u = \frac{U_{max}}{k I_{max}} = 202.76 \text{ N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$



El modelo dado en 1.8a y 1.8b, con  $ki = u/k_u$  se convierte en el dado por (1.9)

$$\ddot{\theta}_1 - a \sin \theta_1 = -bu \quad (1.9a)$$

$$\ddot{\theta}_2 = cu \quad (1.9b)$$

Las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  toman los siguientes valores

$$a = 78.4 \quad b = 1.08 \quad c = 198$$

En la etapa de amplificación, la interfaz de potencia para el manejo del motor es un inversor *PWM* que entrega un voltaje en el rango  $[-24, 24]$  V [8].

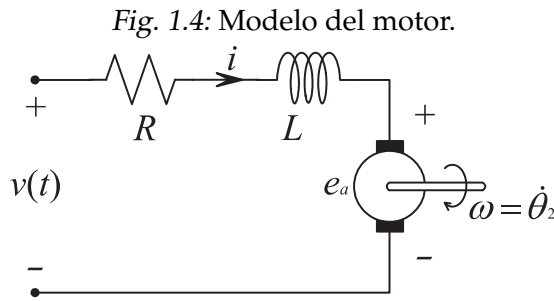
## 1.4 El modelo del motor

Un motor de imán permanente puede modelarse con el circuito que se muestra en la figura 1.4. La dinámica asociada a este sistema está dada por (1.10)

$$v(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + e_a \quad (1.10)$$

siendo  $v(t)$  el voltaje aplicado y  $e_a$  el voltaje inducido en el rotor, que se modela como  $e_a = k\omega_r = k\dot{\theta}_2$  y por lo tanto se obtiene (1.11)

$$v(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + k \frac{d\theta_2}{dt} \quad (1.11)$$



De los datos del motor,  $R = 12.1 \, \Omega$  y  $L = 6.27 \, \text{mH}$ . La constante de tiempo asociada a la dinámica eléctrica es entonces  $L/R = 0.52 \, \text{ms}$ ; la cual es muy rápida en comparación con la parte mecánica y por lo tanto puede despreciarse ( $L \approx 0$ ), evitando modelar un sistema de mayor orden. La ecuación (1.12) presenta un modelo simplificado en el que se ha despreciado el efecto inductivo:

$$v(t) = Ri + k \frac{d\theta_2}{dt} \quad (1.12)$$

---

La velocidad de giro máxima se obtiene cuando el voltaje inducido iguala al voltaje aplicado (24 V máximo)

$$\text{máx } \dot{\theta}_2 = \frac{V_{max}}{k} = 875.9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por efectos de la fricción (no considerada en el modelo), la velocidad máxima del motor según el fabricante es de  $822 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

# 2

## Control No Lineal: Linealización por Realimentación

### 2.1 Introducción

Los controladores lineales aplicados a sistemas no lineales tienen rangos de validez restringidos alrededor de puntos de operación. Para diseñar estos controladores (reguladores), se realiza una linealización clásica (aproximación de Taylor de primer orden) del modelo del sistema para un punto de operación deseado y se aplican los métodos típicos al modelo lineal obtenido [3]. Como consecuencia, cuando los estados del sistema se alejan (más de lo esperado) del punto de operación, se presentan comportamientos no deseados como mayores sobrepasos, oscilaciones, grandes exigencias sobre la señal de control (y saturación), etc [12].

En la técnica de linealización por realimentación (feedback linearization), se plantea una señal de control con la cual, en lazo cerrado, el sistema se comporte como uno lineal *simple*, con un orden igual (linealización exacta) o menor (linealización parcial) al del sistema que se está controlando. Puede decirse entonces que la señal de control tiene dos componentes: una se encarga de *cancelar* las no-linealidades de la planta y la otra lleva a cabo la tarea de control asignada [6, 11, 12].

Una ventaja consiste en que se obtienen rangos mayores de operación, limitados por la capacidad de la señal de control y por características propias

del sistema e incluso puede, en algunos casos, lograrse un control global (en todo el espacio de estado). De esta manera, pueden llevarse a cabo tareas tanto de seguimiento como de regulación, permitiendo establecer la forma como el sistema debe pasar de un estado (punto de operación) a otro.

Al ser lineal el sistema en lazo cerrado, pueden emplearse las técnicas clásicas de control lineal para garantizar la estabilidad (local o global) y establecer parámetros típicos de diseño como velocidad de respuesta, sobrepaso, amortiguamiento, etc. [3, 14, 15]

## 2.2 Sistemas Dinámicos No Lineales

En este trabajo se estudian los sistemas no lineales de una entrada y una salida que se clasifican como *afines* (lineales en el control) [12] y permiten un modelamiento de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Siendo  $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$  el vector de estados,  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones vectoriales suaves de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  (vectores columna). Por su parte,  $u$  (señal de control) y  $h(x)$  (función de salida) son funciones escalares. En los casos en que  $f$  y  $g$  no dependen del tiempo se dice que el sistema es autónomo (invariante con el tiempo, [6, 12]).

Si adicionalmente la entrada de control se define como una función de los estados,  $u = u(x)$ , el sistema en (2.1) puede representarse en forma compacta como  $\dot{x} = f_1(x)$  (modelo de lazo cerrado); donde  $f_1$  es de nuevo una función suave en  $\mathbb{R}^n$ .

Los *puntos de equilibrio* del sistema  $\dot{x} = f(x)$  son aquellos puntos del espacio de estado que satisfacen la relación  $\dot{x} = 0$ , lo que directamente conduce a la expresión

$$f(\bar{x}) = 0$$

Si el estado inicial del sistema corresponde a un punto de equilibrio,  $x(0) = \bar{x}$  y no se presentan perturbaciones, el sistema permanece en dicho punto, es decir

$$x(t) = \bar{x} \quad \forall t \geq 0$$

Un punto de equilibrio  $\bar{x}$  es asintóticamente estable si las trayectorias en el espacio de estado convergen hacia él desde alguna vecindad  $|x(t) - \bar{x}| < \delta$  y es inestable si las trayectorias que inician desde puntos arbitrariamente cercanos a  $\bar{x}$  son divergentes [12]. En particular, el sistema lineal descrito por la ecuación

de estados  $\dot{x} = Ax$  tiene un único punto de equilibrio en  $x = 0$  si  $A$  es no singular, de lo contrario tiene infinitos puntos de equilibrio; su estabilidad depende de la ubicación de los valores propios de  $A$  en el plano complejo.

### 2.2.1 El péndulo con rueda de reacción

En el capítulo 1 se obtuvo el modelo del sistema (ecuaciones (1.9a) y (1.9b)):

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 - a \sin \theta_1 &= -bu \\ \ddot{\theta}_2 &= cu\end{aligned}$$

con  $a = 78.4$ ,  $b = 1.08$  y  $c = 198$ . Dado que la rueda de inercia es simétrica, el valor del ángulo  $\theta_2$  no es relevante para el control del péndulo, lo que permite plantear un modelo de orden reducido con variables de estado  $x_1 = \theta_1$ ,  $x_2 = \dot{\theta}_1$ ,  $x_3 = \dot{\theta}_2$ , esto es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a \sin x_1 - bu \\ \dot{x}_3 &= cu\end{aligned}\tag{2.2}$$

En forma vectorial, este modelo puede representarse como sigue

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix} u\tag{2.3}$$

comparando esta expresión con la primera ecuación en (2.1) se obtienen las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  para el modelo del péndulo con rueda de reacción

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ a \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix}\tag{2.4}$$

Al igualar a cero la función  $f(x)$  se obtienen los puntos de equilibrio del sistema (también pueden observarse intuitivamente en la figura 1.2). Considerando  $u = 0$  se obtiene

$$\bar{x}_1 = \pm m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \bar{x}_2 = 0$$

Los estados de equilibrio son entonces aquellos en los que las velocidades son cero y el ángulo del péndulo ( $\theta_1$ ) es un múltiplo entero de  $\pi$ . Los puntos estables corresponden a valores impares de  $m$  (posición vertical abajo) y los inestables se asocian con  $m = 0$  o valores pares (posición vertical arriba).

## 2.3 Notación: Cálculo vectorial [6, 12]

Sobre las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  del sistema no lineal afín de una entrada y una salida modelado con (2.1), se definen las siguientes operaciones diferenciales

**Gradiente de  $h(x)$**

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

**Jacobiano de  $f(x)$  (o  $g(x)$ )**

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dada la función de salida  $h(x)$  y el campo vectorial  $f(x)$ , se define una nueva función escalar llamada la *derivada Lie*,  $L_f h(x)$ , de  $h$  con respecto a  $f$ , que se calcula como

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f = \nabla h \cdot f \quad (2.5)$$

La derivada Lie es entonces la derivada direccional de  $h$  a lo largo de las direcciones de  $f$ . Las derivadas Lie de orden superior de  $h$  con respecto a  $f$  se calculan de forma recursiva como sigue

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f h &= \nabla h \cdot f \\ L_f^2 h &= L_f(L_f h) = \nabla(L_f h) \cdot f \\ &\vdots \\ L_f^i h &= L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla(L_f^{i-1} h) \cdot f \\ i &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

La derivada Lie de  $L_f h(x)$  con respecto a  $g$  (mixta) se obtiene como

$$L_g L_f h = L_g(L_f h) = \nabla(L_f h) \cdot g \quad (2.7)$$

En la siguiente sección se aprecia el uso de las derivadas Lie en el análisis de los sistemas dinámicos no lineales.

Dados los campos vectoriales de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(x)$  y  $g(x)$ , el corchete Lie de  $f$  y  $g$  es un nuevo vector definido por

$$[f, g] = \text{ad}_f g = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g \quad (2.8)$$

El símbolo  $\text{ad}$  (adjunta) es una notación alternativa que permite expresar productos Lie de orden superior en una forma compacta. Estos productos se obtienen de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^0 g &= g \\ \text{ad}_f g &= [f, g] \\ \text{ad}_f^2 g &= [f, \text{ad}_f g] = [f, [f, \text{ad}_f g]] \\ &\vdots \\ \text{ad}_f^i g &= [f, \text{ad}_f^{i-1} g] \\ i &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Los productos Lie permiten determinar si el sistema es controlable (linealizable por realimentación), esta cuestión se analizará más adelante en este capítulo.

## 2.4 Linealización Entrada-Salida

Para una *linealización parcial* (entrada-salida), la salida del sistema,  $y = h(x)$ , se deriva con respecto al tiempo tantas veces como sea necesario para obtener una ecuación diferencial que relacione a  $y(t)$  con la entrada  $u$ . El orden de la ecuación obtenida se conoce como el *grado relativo* ( $r$ ) [6,7] y en los casos bien definidos es menor o igual al orden del sistema físico ( $r \leq n$ ).

Al derivar la función de salida del sistema y usando la regla de la cadena se obtiene la ecuación (2.4)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \nabla h \cdot \dot{x} \\ &= \nabla h [f(x) + g(x)u] \end{aligned} \quad (2.10)$$

En este ultimo resultado se ha usado la ecuación de estados del sistema. La ecuación (2.11) presenta lo obtenido al separar los términos y usar la notación de derivadas Lie

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (2.11)$$

Si  $L_g h \neq 0$ , el grado relativo del sistema es  $r = 1$ , de lo contrario, al derivar de nuevo resulta (2.12)

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} L_f h(x) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \dot{x}$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) u \quad (2.12)$$

En este caso, si  $L_g L_f h(x) \neq 0$ , el sistema tiene grado relativo  $r = 2$ , de no ser así, deben tomarse más derivadas de la salida hasta obtener un resultado como (2.13)

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \quad (2.13)$$

En esta expresión,  $y^{(r)} = d^r y / dt^r$ . Se busca que, por simplicidad, el sistema se comporte en lazo cerrado como un integrador de orden  $r$ , es decir, se establece una dinámica lineal de la forma (2.14) (que puede considerarse como un modelo de referencia)

$$y^{(r)} = v \quad (2.14)$$

En la cual  $v$  es una *señal de control lineal* (regulador del error). Comparando las expresiones en (2.13) y (2.14), la señal de control  $u$  queda definida como se presenta en (2.15)

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} [v - L_f^r h(x)] \quad (2.15)$$

en la que se observa que  $u$  es una función no lineal de los estados. Con la dinámica lineal en lazo cerrado descrita en (2.14), la señal de regulación puede diseñarse de forma que la salida  $y(t)$  tienda a cero o a un valor de referencia dado  $y_{ref}$  (constante), lo cual se logra, como se muestra en (2.16), definiendo

$$v = -k_1(y - y_{ref}) - k_2\dot{y} - \dots - k_r y^{(r-1)} \quad (2.16)$$

Con esta realimentación de la salida, la dinámica del sistema en lazo cerrado queda descrita por la ecuación diferencial *lineal* (2.17), que resulta de remplazar (2.16) en (2.14)

$$y^{(r)} + k_r y^{(r-1)} + \dots + k_2 \dot{y} + k_1 y = k_1 y_{ref} \quad (2.17)$$

Para que  $y(t)$  tienda a  $y_{ref}$ , las constantes  $k_1, k_2, \dots, k_r$  deben seleccionarse de forma que el polinomio característico asociado tenga todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo del plano  $s$ .

De forma alternativa, si se propone una trayectoria  $y_d(t)$  (cuyas primeras  $r$  derivadas sean continuas) para ser seguida por el sistema, la señal de control  $v$  puede ser planteada como en (2.18)

$$v = y_d^{(r)}(t) - k_1(y - y_d) - k_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - \dots - k_r(y^{(r-1)} - y_d^{(r-1)}) \quad (2.18)$$

De (2.14) y (2.18) se obtiene la dinámica en lazo cerrado dada por (2.19)

$$e_s^{(r)} + k_r e_s^{(r-1)} + \dots + k_2 \dot{e}_s + k_1 e_s = 0 \quad (2.19)$$

en la que  $e_s = y(t) - y_d(t)$  es el error de seguimiento. De nuevo, con una selección apropiada de las constantes  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , es posible lograr que el error tienda a cero; lo que implica que la salida  $y(t)$  sigue la trayectoria  $y_d$ .



Dado que en lazo cerrado el sistema se comporta como uno de orden  $r \leq n$ , se presenta entonces una *dinámica interna* de orden  $n - r$  que ha quedado oculta luego de la realimentación (se hace inobservable). Existen criterios que permiten estudiar la estabilidad de la dinámica interna, pero su validez solo puede garantizarse localmente (alrededor de puntos de operación) [6, 12].

### 2.4.1 Linealización parcial para el Péndulo con Rueda de Reacción

Tomando como salida el ángulo del péndulo ( $\theta_1$ ), el modelo completo del sistema ( $\dot{x} = f(x) + g(x)u, y = h(x)$ ) queda definido de acuerdo con (2.20)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix} u \quad (2.20a)$$

$$y = x_1 \quad (2.20b)$$

Al derivar  $y(t)$  con respecto al tiempo, para encontrar una relación con la señal de control se obtienen las expresiones (2.21) con base en los resultados (2.11) y (2.12)

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ a \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix} u = x_2 \quad (2.21a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ a \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix} u = a \sin x_1 - bu \quad (2.21b)$$

De este resultado se concluye que el grado relativo del sistema es  $r = 2$  para la salida que se definió y como consecuencia, queda oculta una dinámica de primer orden (debido a que el orden del sistema es 3). La señal de control que permite tener una dinámica lineal de segundo orden en lazo cerrado se define entonces, según (2.22), de la forma siguiente:

$$u = \frac{a \sin x_1 - v}{b} \quad (2.22)$$

Teóricamente, esta ley de control lograría regular cualquier tipo de condición inicial y perturbaciones de poca duración, sin embargo, las limitaciones en los valores extremos permisibles para  $u$  y la facilidad con que el péndulo se aleja de la posición invertida, hacen que el rango de validez quede restringido a una

pequeña vecindad de los puntos de equilibrio y a perturbaciones de pequeña magnitud y duración.

La señal de regulación  $v$  para este caso toma la forma (2.23)

$$v = -k_1(y - y_{ref}) - k_2\dot{y} \quad (2.23)$$

La posición de referencia  $y_{ref}$  para este sistema puede tomar solo los valores cero o  $\pi$  (los puntos de equilibrio), ya que no es posible mantener el péndulo en un ángulo distinto porque el sistema es *sub-actuado* [4, 10] y por requerir una aceleración constante de la rueda para compensar el torque producido por la gravedad (este torque se hace cero en los puntos de equilibrio).

Los resultados obtenidos al implementar este esquema de control (regulación) se presentan en las figuras 2.1 y 2.2. Las constantes  $k_1 = 320.475$  y  $k_2 = 26.67$  se diseñaron con base en condiciones de sobrepaso y tiempo de respuesta para un sistema típico de segundo orden. Las variaciones en la señal de control en los instantes en que el péndulo se encuentra en los puntos de equilibrio se deben principalmente al torque permanente producido por los cables de conexión y a la no linealidad relacionada con la zona muerta del motor. Estos agentes (inherentes a la construcción del sistema - figura 1.1) tienen a su vez como efecto un incremento continuo de la velocidad de la rueda (por ser un integrador), principalmente en la posición invertida. Una solución a este inconveniente consiste agregar en la señal de control una pequeña realimentación de dicho estado para mantenerlo acotado, buscando mantener una buena capacidad de aceleración para que el sistema reaccione bien ante las perturbaciones [1].

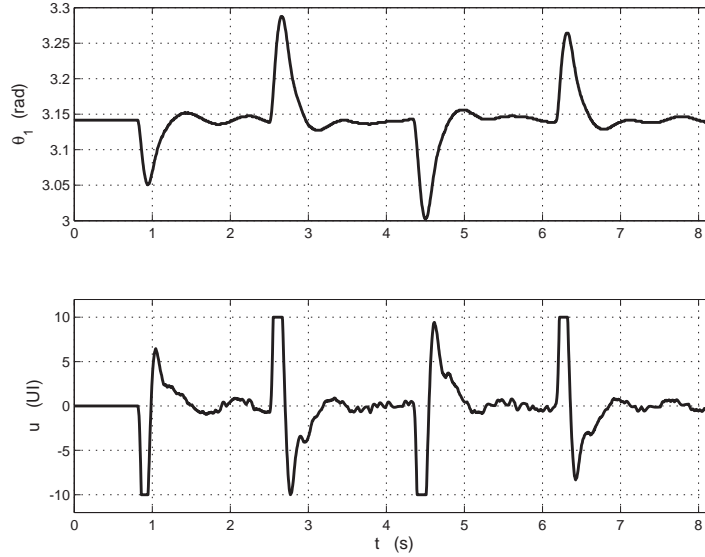
Se observa que el rango de regulación es mayor cuando el péndulo se encuentra en su posición de equilibrio estable (figura 2.1). Este resultado es razonable ya que el sistema tiende a alejarse rápidamente del punto de equilibrio inestable y tiende asintóticamente (y de forma natural) a la posición estable.

Para implementar el esquema de seguimiento mediante el regulador de error definido en (2.18), se diseñó la trayectoria deseada  $y_d(t)$  con base en una simulación de la siguiente forma (propuesta en [5]). Desde la posición de equilibrio estable es posible hacer oscilar al sistema con una amplitud creciente si se aplica una señal de control constante y cuyo signo dependa de la velocidad del péndulo en una vecindad definida alrededor de  $\theta_1 = \pm\pi$ , es decir

$$u = \begin{cases} U_0, & \text{si } \dot{\theta}_1 > 0 \\ -U_0, & \text{si } \dot{\theta}_1 < 0 \end{cases}$$

Con el tamaño de la zona de aplicación de esta señal de control se ajusta

Fig. 2.1: Regulador de perturbaciones con linealización parcial alrededor del equilibrio estable ( $\theta_1 = \pi$ ).

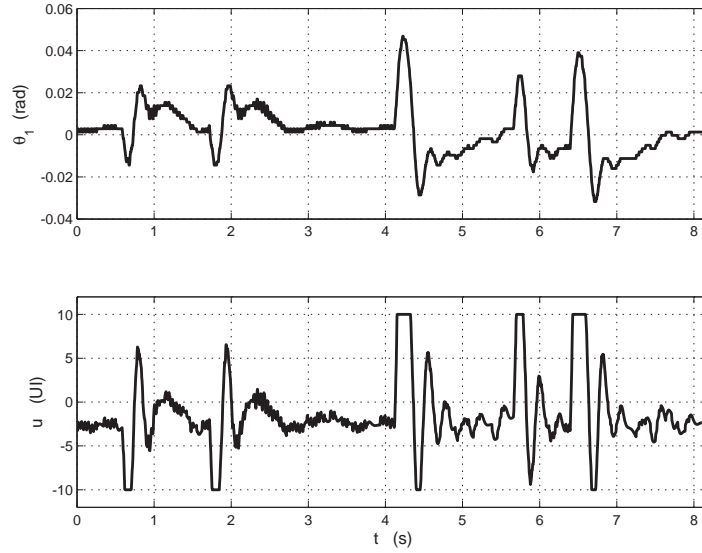


el tiempo en el cual el péndulo alcanza la posición invertida (zonas más amplias reducen el tiempo de subida). Este proceso es necesario ya que para lograr una subida directa se requieren valores muy elevados de la señal de control. Cuando el péndulo llega a puntos suficientemente cercanos al equilibrio inestable (en la simulación), un controlador lineal se encarga de llevar el sistema hasta esa posición y mantenerlo allí, regulando pequeñas perturbaciones.

La trayectoria  $y_d$  obtenida de esta simulación y la salida del sistema real se muestran en la figura 2.3, el pequeño error de seguimiento se debe a la capacidad de regulación de la señal de control y en parte a que  $y(0) = y_d(0)$ . Nótese que a pesar de la saturación en la señal de control, el sistema logra seguir la referencia. Esta saturación impide que el tiempo de subida pueda reducirse porque el sistema no lograría seguir una referencia más rápida de lo permitido.

Debe aclararse que el seguimiento de la trayectoria obtenida se realiza usando únicamente el controlador diseñado con la linealización parcial, tanto en la parte oscilatoria como en el punto de equilibrio inestable alcanzado. Los autores en [1] y [5] proponen usar un regulador lineal luego de alcanzar la posición invertida.

Fig. 2.2: Regulador de perturbaciones con linealización parcial alrededor del equilibrio inestable ( $\theta_1 = 0$ ).



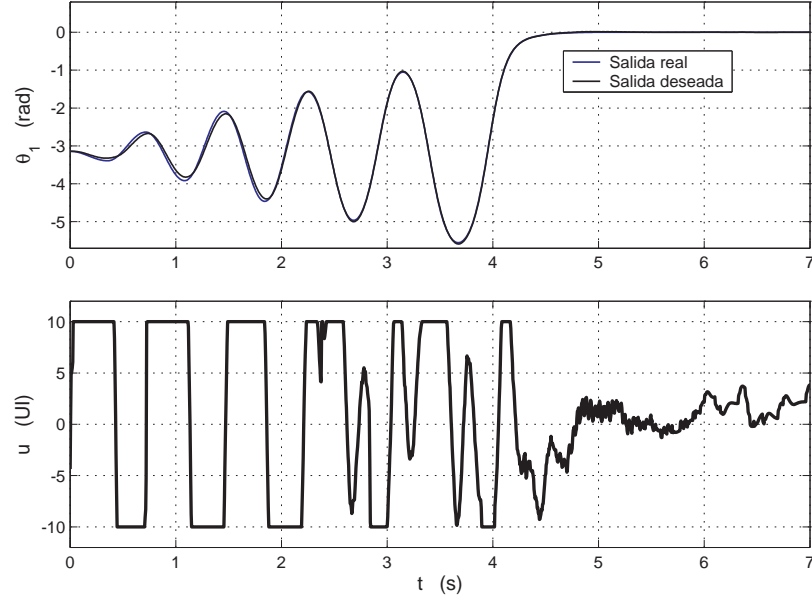
## 2.5 Linealización Entrada-Estados

Para lograr una *linealización exacta* (entrada-estados), es necesario que el grado relativo del sistema sea igual a su orden ( $r = n$ ), como consecuencia, en lazo cerrado no se presenta dinámica interna. La función de salida  $h(x)$  no se debe tomar, en general, directamente como la variable a controlar; debe seleccionarse de forma que, como indica la definición de grado relativo, se obtenga una relación directa entre la entrada y la salida solo cuando se haya derivado  $n$  veces con respecto al tiempo la función  $y = h(x)$  [6, 15]. Esto implica que deben satisfacerse las condiciones establecidas en (2.5)

$$(2.24) \quad \begin{cases} L_g L_f^j h(x) = 0, & j = 0, 1, \dots, n-2 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0 & (j = n-1) \end{cases}$$

Con las propiedades del producto Lie [6, 12] este conjunto de ecuaciones diferenciales parciales puede plantearse de forma equivalente como se indica en (2.25)

Fig. 2.3: Resultados del esquema de seguimiento de trayectoria.



$$\begin{cases} \nabla h \cdot \text{ad}_f^j g = 0, & j = 0, 1, \dots, n-2 \\ \nabla h \cdot \text{ad}_f^{n-1} g \neq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Sin embargo no todos los sistemas admiten este tipo de linealización. Un sistema modelado según (2.1) puede controlarse con un esquema de linealización exacta solo si las funciones vectoriales  $f(x)$  y  $g(x)$  cumplen con las siguientes condiciones (*Teorema de Frobenius*)

- El conjunto de vectores  $\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g\}$  es linealmente independiente.
- El conjunto  $\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$  es involutivo.

La primera es una condición de controlabilidad. En particular, para un sistema lineal representado por el modelo de estados  $\dot{x} = Ax + Bu$ , en el cual  $f(x) = Ax$  y  $g(x) = B$ , puede verificarse que

$$[g \text{ ad}_f g \cdots \text{ad}_f^{n-1} g] = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1} B] = W_C$$

Siendo  $W_C$  la matriz de controlabilidad del sistema, el cual es *controlable* si  $W_C$  es de rango completo.

En relación con la segunda condición, un conjunto dado de funciones vectoriales es involutivo si el producto Lie de cualquier par de ellas puede

expresarse como una combinación lineal de los elementos del conjunto. En particular, los conjuntos con vectores constantes y los conjuntos conformados por un único vector son involutivos [6].

Una posible desventaja de este enfoque es que no se puede tomar como salida la variable a controlar y esta aparece solo como una componente dentro de la función de salida que debe cumplir las condiciones establecidas en (2.25). Esto implica que los esquemas de seguimiento presentan una mayor complejidad en el diseño, al requerir definir la salida deseada indirectamente de la trayectoria establecida para el estado que se desea controlar. Sin embargo es necesario resaltar que las tareas de regulación se efectúan directamente, ya que como se verá para el caso del péndulo con rueda de reacción, la transformación que se efectúa en la definición de la función de salida, conserva el origen del espacio de los estados.

### 2.5.1 Linealización exacta local para el Péndulo con Rueda de Reacción

Con las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  del modelo (2.4) se construye el conjunto de vectores  $\{g, ad_f g, ad_f^2 g\}$  como sigue

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a \cos x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g = [0]_{3 \times 3}$$

$$ad_f g = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g = [b \ 0 \ 0]^T$$

$$ad_f^2 g = \nabla(ad_f g) \cdot f - \nabla f \cdot ad_f g = [0 \ -ab \cos x_1 \ 0]^T$$

$$\{g, ad_f g, ad_f^2 g\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -ab \cos x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.26)$$

Conformando una matriz cuyas columnas sean estos vectores, su determinante está dado por

$$\Delta = -ab^2 c \cos x_1$$

el cual es diferente de cero para  $x_1 \neq \pm\pi/2$ . Por lo tanto en el intervalo  $-\pi/2 < x_1 < \pi/2$  el conjunto es linealmente independiente. Además el subconjunto

$\{g, ad_f g\}$  es involutivo porque ambos vectores son constantes. Se concluye entonces que al péndulo con rueda de reacción puede aplicarse una linealización entrada-estados o exacta alrededor de  $x_1 = 0$  en el intervalo  $-\pi/2 < x_1 < \pi/2$ .

Para obtener un grado relativo igual al orden de la planta ( $r = 3$ ), la función de salida  $h(x)$  debe satisfacer el conjunto de ecuaciones (2.25), que para el péndulo con rueda de reacción queda definido segun (2.27)

$$\nabla h \cdot g = -b \frac{\partial h}{\partial x_2} + c \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \quad (2.27a)$$

$$\nabla h \cdot ad_f g = b \frac{\partial h}{\partial x_1} = 0 \quad (2.27b)$$

$$\nabla h \cdot ad_f^2 g = -ab \cos x_1 \frac{\partial h}{\partial x_2} \neq 0 \quad (2.27c)$$

De la ecuación (2.27b) se observa que  $h(x)$  no debe depender de  $x_1$ . Como consecuencia, una propuesta sencilla para la función  $h(x)$  podría tener la forma presentada en (2.28), siendo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  constantes

$$h(x) = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 \quad (2.28)$$

Con lo cual, la ecuación (2.27a) se reduce a la expresión  $-b\alpha_1 + c\alpha_2 = 0$ . De este resultado se observa que, tomando  $\alpha_1 = c$  y  $\alpha_2 = b$  (como una de las posibles soluciones), la función  $h(x)$  satisface el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (2.27).

Tomando las derivadas de la función de salida ( $y = h(x) = cx_2 + bx_3$ ) con respecto al tiempo se obtiene la relación directa con la entrada  $u$  en la tercera derivada como indica (2.29)

$$\dot{y} = L_f h(x) = ac \sin x_1$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) = acx_2 \cos x_1$$

$$y^{(3)} = L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) = -acx_2^2 \sin x_1 + \frac{a^2 c}{2} \sin 2x_1 - (abc \cos x_1) u \quad (2.29)$$

Para obtener la dinámica lineal (2.14) con  $r = n = 3$  en lazo cerrado, la entrada de control  $u$  debe definirse como

$$u = \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} [v - L_f^3 h(x)]$$

$$u = \frac{1}{abc \cos x_1} \left[ \frac{a^2 c}{2} \sin 2x_1 - acx_2^2 \sin x_1 - v \right] \quad (2.30)$$

Observar que en la ecuación (2.30) la señal de control  $u(t)$  cumple dos objetivos: (1) generar un sistema de lazo cerrado lineal y con el mismo orden de la planta y (2) incluir una componente de regulación lineal.

Con la señal de regulación  $v$  propuesta como una realimentación lineal de la salida  $h(x)$  y sus dos primeras derivadas, esto es  $v = -k_1 y - k_2 \dot{y} - k_3 \ddot{y}$ . La estabilidad en lazo cerrado se garantiza con la elección apropiada de las constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ .

Para realizar una implementación se tienen dos alternativas: la primera es medir las velocidades  $x_2 = \dot{\theta}_1$  y  $x_3 = \dot{\theta}_2$ , calcular la función  $h(x)$  según (2.28) e implementar numéricamente las derivadas  $\dot{y} = \dot{h}$  y  $\ddot{y} = \ddot{h}$ . La segunda opción consiste en usar las expresiones previas a (2.29) para implementar las derivadas  $\dot{y}$  y  $\ddot{y}$  como se resume en (2.31)

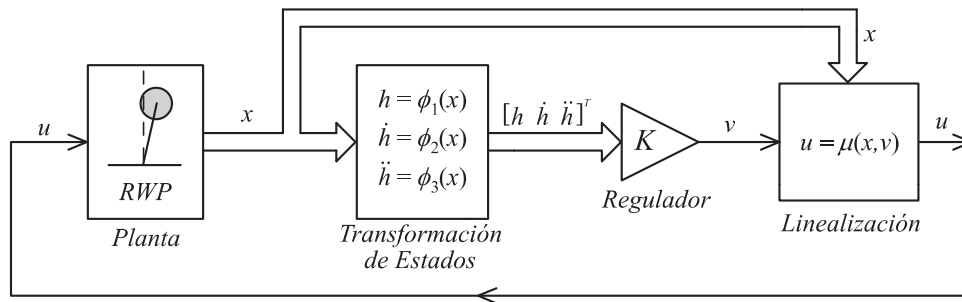
$$y = h(x) = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 \quad (2.31a)$$

$$\dot{y} = \dot{h} = ac \sin x_1 \quad (2.31b)$$

$$\ddot{y} = \ddot{h} = acx_2 \cos x_1 \quad (2.31c)$$

En la figura 2.4 se presenta el esquema de control detallando sus componentes. La salida de la planta es el vector de estados  $x = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2]^T$ . El bloque de transformación calcula  $h(x)$ ,  $\dot{h}(x)$  y  $\ddot{h}(x)$  y con estas funciones se genera la señal de regulación  $v = -[k_1 \ k_2 \ k_3][h \ \dot{h} \ \ddot{h}]^T$ , ( $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ ). Finalmente la función de linealización  $\mu(x, v)$  se encarga de generar la señal de control no lineal  $u$  según la expresión (2.30).

Fig. 2.4: Esquema de linealización exacta (entrada-estados).

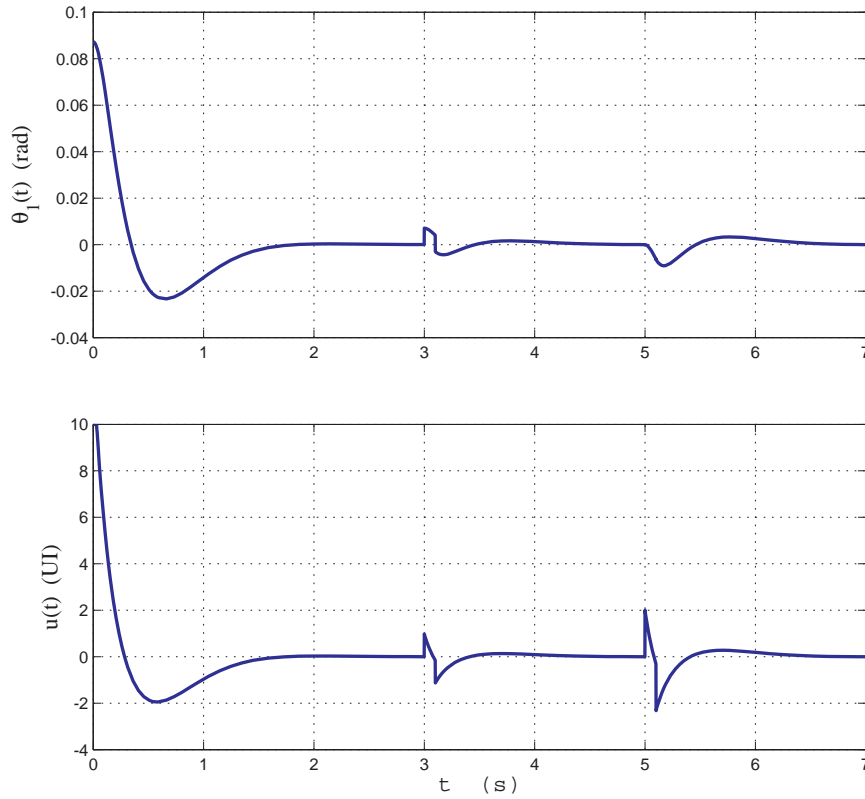


Analizando la ecuación (2.30) se podría concluir que este controlador presenta un rango de validez definido por  $-\pi/2 < \theta_1 < \pi/2$ , ya que  $u(t)$  se indetermina



cuando  $\theta_1 = \pm\pi/2$ . Sin embargo, debido a las limitaciones físicas de la etapa de potencia y del motor, el controlador opera solo en un pequeño rango alrededor de la posición de equilibrio inestable ( $\theta_1 = 0$ ). La figura 2.5 presenta los resultados de simulación cuando se define la condición inicial  $\theta_1(0) = 5^\circ$  (0.09 rad). Con el vector de ganancias  $K = [136.66 \ 73.98 \ 16.43]$  para el regulador lineal  $v$  se obtiene una respuesta satisfactoria manteniendo la señal de control en el rango permitido ( $-10 \leq u \leq 10$  UI). Se han incluido además pequeñas perturbaciones (en magnitud y duración): el la salida a los 3.0 segundos y en la señal de control a los 5.0 segundos, se observa como el controlador logra atenuar estas perturbaciones.

Fig. 2.5: Regulación de condiciones iniciales y perturbaciones con linealización exacta sobre el péndulo con rueda de reacción.



# 3

## Control Difuso: Compensación Distribuida Paralela

### 3.1 Introducción

Como se expuso en el capítulo anterior, un enfoque lineal no permite controlar el sistema de prueba en todo su rango de operación. Además, los límites en la señal de control no permiten llevar el péndulo desde su posición de equilibrio natural a la posición invertida de forma directa. El alcance gradual de la posición  $\theta_1 = 0$  se puede resolver de diversas formas, entre las que se destacan la regulación de una función de energía [9] y el seguimiento de trayectoria.

En este capítulo se propone el diseño de un controlador difuso basado en un modelo Takagi-Sugeno (T-S) para la planta, con reglas de la forma

$$\text{IF } \theta_1 \text{ IS } \mu_i \text{ THEN } \dot{x} = A_i x + B_i u; \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.1)$$

Las funciones  $\mu_i(\theta_1)$  son los conjuntos difusos (funciones de pertenencia);  $p$  es el número de reglas y los pares de matrices  $\{A_i, B_i\}$  representan el modelo linealizado alrededor de  $p$  puntos de operación [13].

En los antecedentes de cada regla se analiza solo el ángulo  $\theta_1$  ya que la no-linealidad del modelo propuesto se presenta en el término  $\sin \theta_1$ .

A diferencia de la linealización tradicional (hiper-plano tangente), en la que se obtienen modelos de la forma  $\Delta\dot{x} = A_i\Delta x + B_i\Delta u$ , el enfoque de **no-linealidad sectorial** (*sector nonlinearity*) propuesto en [13], genera expresiones en las que aparecen los estados  $x$  en vez de las variaciones  $\Delta x$ .

Para cada regla del modelo difuso se plantea un regulador lineal ( $u = -K_i x$ ) con base en parámetros de la respuesta deseada. La combinación difusa de los reguladores locales produce la señal de control global.

## 3.2 Modelo T-S de la planta

La ecuación vectorial 2.3 define el modelo no lineal de estados del sistema ( $x_1 = \theta_1$ ,  $x_2 = \dot{\theta}_1$ ,  $x_3 = \dot{\theta}_2$ ). Las ecuaciones son las siguientes

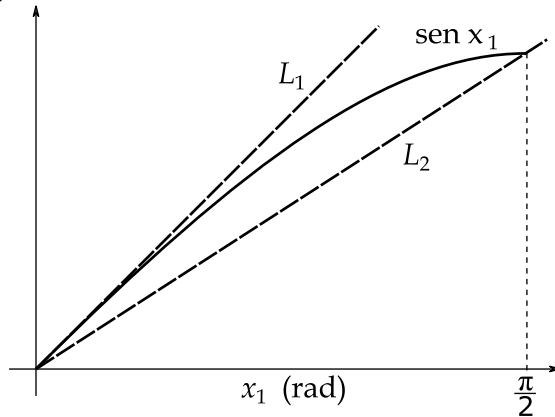
$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.2a)$$

$$\dot{x}_2 = a \sin x_1 - bu \quad (3.2b)$$

$$\dot{x}_3 = cu \quad (3.2c)$$

Con el método de la no-linealidad sectorial, la función  $z(x_1) = \sin x_1$ , se aproxima con rectas que pasan por el origen y por los puntos de operación deseados. En la figura 3.1 se presenta la función seno en el intervalo  $0 \leq x_1 \leq \pi/2$ .

Fig. 3.1: No-linealidad sectorial de la función seno.



La recta  $L_1$  es tangente a la función en el origen y  $L_2$  pasa por el punto  $(\pi/2, 1)$ . Se observa que en el intervalo dado, la función se encuentra entre ambas rectas, es decir

$$\frac{2}{\pi}x_1 \leq \sin x_1 \leq x_1$$

En un modelo difuso T-S, la función seno se aproxima por la recta  $L_1$  cuando el ángulo ( $x_1$ ) es cercano a cero y por  $L_2$  cuando es cercano a  $\pi/2$ . Se establece entonces la función de aproximación  $\hat{z}(x_1)$

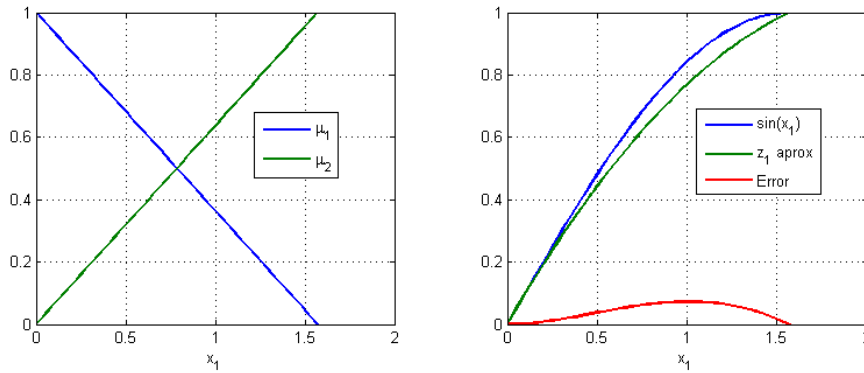
$$\sin x_1 \approx \hat{z}(x_1) = \mu_1(x_1)x_1 + \mu_2(x_1)\frac{2x_1}{\pi}$$

Las funciones de pertenencia  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tienen las etiquetas ' $\theta_1$  es cercano a cero' y ' $\theta_1$  es cercano a  $\pi/2$ ' respectivamente. Proponiendo estas funciones como rectas, su representación es la siguiente (se debe cumplir la relación  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ ):

$$\mu_1 = 1 - \frac{2}{\pi}x_1 \quad \mu_2 = \frac{2}{\pi}x_1$$

La figura 3.2 muestra las funciones de pertenencia y la aproximación  $\hat{z}(x_1)$  obtenida. Para una mejor aproximación se deben agregar rectas en puntos intermedios.

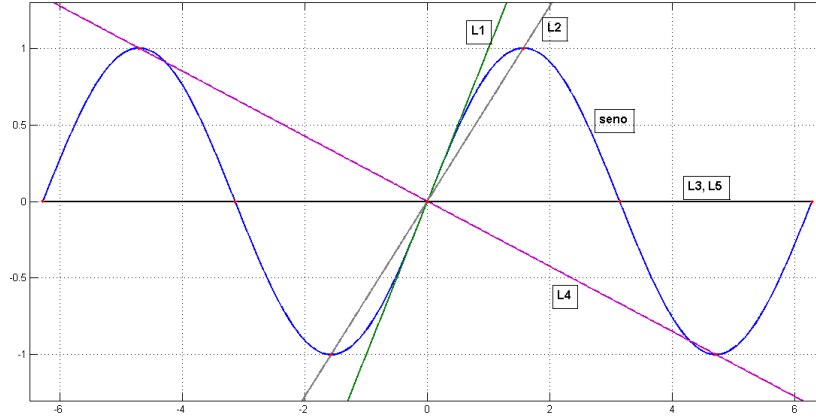
Fig. 3.2: Izq: Funciones de pertenencia. Der: Aproximación difusa.



Para trabajar con un esquema de seguimiento de trayectoria es necesario definir un rango amplio de operación, ya que las oscilaciones hacen que el ángulo del péndulo tome valores cercanos a  $\pm 2\pi$  (ver la fig. 2.3). Se propone un modelo T-S con cinco reglas para los puntos de operación  $\theta_1 = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm 3\pi/2, \pm 2\pi$ . Dado que  $\sin \theta_1$  es una función impar, con una misma recta se puede realizar la aproximación en dos puntos con ubicación simétrica (por ejemplo  $\pm\pi/2$ ), es decir, cinco reglas para nueve puntos de linealización. La figura 3.3 muestra las rectas para los puntos indicados,  $L_3$  y  $L_5$  coinciden con el eje horizontal. Las ecuaciones de dichas rectas son las siguientes

$$\begin{aligned} L_1(x_1) &= x_1 & L_2(x_1) &= \frac{2}{\pi}x_1 & L_4(x_1) &= -\frac{2}{3\pi}x_1 \\ L_3(x_1) &= L_5(x_1) & &= 0 \end{aligned}$$

Fig. 3.3: Función seno y rectas de aproximación.



Alrededor de cada punto de operación, la función  $\sin x_1$  se aproxima por la ecuación de la recta correspondiente y la función general de aproximación se obtiene con la combinación difusa de las anteriores.

Analizando las ecuaciones de estado (3.2), se observa que la tercera además de ser lineal, solo depende de la entrada  $u(t)$  y no de los estados  $x_1$  y  $x_2$ . Esto permite proponer un modelo de segundo orden con (3.2.a) y (3.2.b), el cual será usado durante la secuencia de levantamiento del péndulo. Los modelos lineales obtenidos para cada uno de los puntos de operación definidos anteriormente se presentan a continuación. Se aprovecha el desacople con la tercera ecuación ( $\dot{x}_3 = cu$ ).

1. Si  $x_1 \approx 0$  entonces  $\sin x_1 \approx L_1(x_1) = x_1$  y por tanto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix} u = A_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu \quad (3.3)$$

2. Si  $x_1 \approx \pi/2$  entonces  $\sin x_1 \approx L_2(x_1) = \frac{2}{\pi}x_1$  y por tanto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2a}{\pi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix} u = A_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu \quad (3.4)$$

3. Si  $x_1 \approx \pi$  entonces  $\sin x_1 \approx L_3(x_1) = 0$  y por tanto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix} u = A_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu \quad (3.5)$$

4. Si  $x_1 \approx 3\pi/2$  entonces  $\sin x_1 \approx L_4(x_1) = -\frac{2}{3\pi}x_1$  y por tanto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2a}{3\pi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix} u = A_4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu \quad (3.6)$$

5. Si  $x_1 \approx 2\pi$  entonces  $\sin x_1 \approx L_5(x_1) = 0$  y por tanto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix} u = A_5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu \quad (3.7)$$

Se puede comprobar que todos los modelos locales obtenidos son controlables, esto permite calcular controladores por realimentación de estados alrededor de cada punto de operación. Este procedimiento se analiza en la sección siguiente.

La combinación difusa de los cinco modelos lineales, permite expresar el modelo T-S no lineal aproximado como se indica en la ecuación (3.8) [2, 13]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^5 \mu_i(x_1) A_i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu \quad (3.8)$$

Las funciones de pertenencia  $\mu_i$  tienen las siguientes etiquetas:

- $\mu_1(x_1) \rightarrow x_1$  es cercana a cero
- $\mu_2(x_1) \rightarrow x_1$  es cercana a  $\pm\pi/2$
- $\mu_3(x_1) \rightarrow x_1$  es cercana a  $\pm\pi$
- $\mu_4(x_1) \rightarrow x_1$  es cercana a  $\pm 3\pi/2$
- $\mu_5(x_1) \rightarrow x_1$  es cercana a  $\pm 2\pi$

Las cinco reglas (antecedentes) para el modelo difuso (3.8) se definen en expresiones de la forma

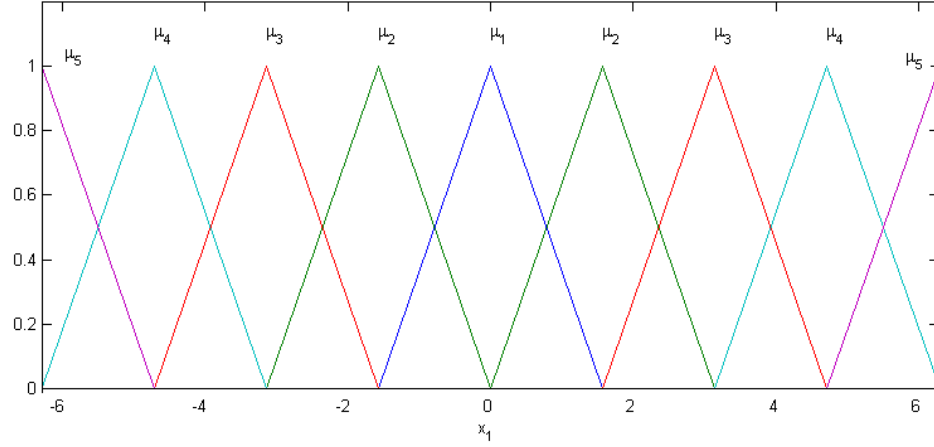
- $R_i$ : IF  $x_1$  IS  $\mu_i(x_1)$  THEN  $\sin x_1 \approx L_i(x_1)$ ;  $i = 1, 2, \dots, 5$ .

En la figura 3.4 se presentan las gráficas de las funciones de pertenencia triangulares utilizadas para cubrir el rango  $-2\pi \leq x_1 \leq \pi$ . Cada una se centra en el punto de linealización correspondiente.

### 3.3 Compensación Distribuida Paralela

El objetivo de generar modelos de estado lineales locales, es poder aprovechar la relativa facilidad con que se diseñan reguladores de la forma  $u = -Kx$  con procedimientos conocidos [3]. Estos reguladores tienen también una validez

Fig. 3.4: Funciones de pertenencia para el modelo difuso.



local, pero su combinación difusa resulta en un controlador para todo el rango de operación definido.

Por simplicidad se definieron polos de lazo cerrado comunes (para todos los modelos lineales), con base en parámetros de sobrepaso ( $M_p$ ) y tiempo de establecimiento ( $t_s$ ) ajustados por ensayo y error, tratando de mantener la señal de control dentro de sus límites.

Para cada modelo lineal de orden dos (ecuaciones (3.3) a (3.7)) se usó el vector de estados reducido  $\hat{x} = [x_1 \ x_2]^t$  y con base en los polos deseados, se calculan ganancias para los reguladores  $u_i = -K_i \hat{x}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) usando la fórmula de Ackerman, que para el caso de segundo orden tiene la expresión (3.9)

$$K_i = [0 \ 1] W_i^{-1} \Delta(A_i) \quad (3.9)$$

$W_i = [B \ A_i^2 B]$  es la matriz de controlabilidad de cada modelo y  $\Delta(s)$  es el polinomio deseado de lazo cerrado. Usando las funciones de pertenencia de la figura 3.4, la señal de control Global tiene la expresión

$$u = \sum_{i=1}^5 \mu_i(x_1) u_i = \sum_{i=1}^5 \mu_i(x_1) K_i \hat{x} \quad (3.10)$$

En teoría, el regulador difuso llevaría los estados del sistema desde una condición inicial dada a cero. En la práctica, dado que la señal de control tiene limitaciones en sus valores extremos, se implementa un seguimiento de trayectoria.

### 3.4 Resultados de simulación

En el modelo propuesto, se toma como referencia cero la posición invertida del péndulo ( $\theta_1 = 0$  en la posición vertical arriba) como se observa en la figura 3.5. Por tanto la posición de equilibrio natural corresponde a  $\theta_1 = \pm\pi$ . Mediante simulación y como se expuso en la sub-sección 2.4.1, se genera una trayectoria con oscilaciones de amplitud creciente para alcanzar la posición  $\theta_1 = 0$  desde la condición inicial  $\theta_1 = \pi$ . En la figura 3.6 se muestra la trayectoria de referencia obtenida. La tarea es entonces lograr un seguimiento de esta referencia al tiempo que se mantenga la señal de control dentro de sus límites.

Fig. 3.5: Representación esquemática del sistema.

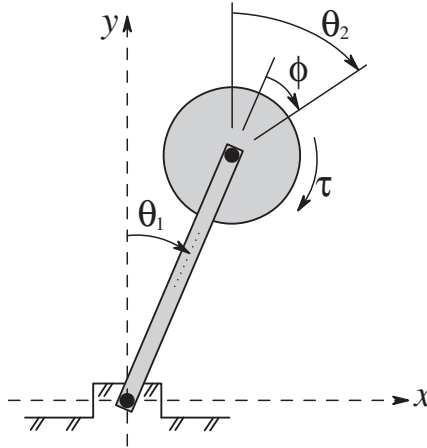
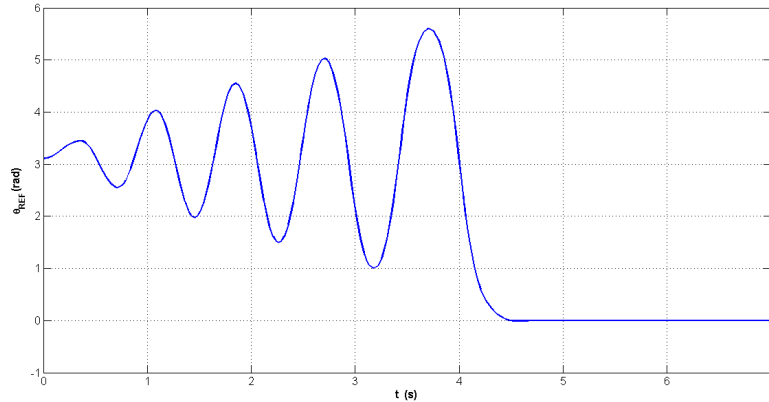


Fig. 3.6: Trayectoria de referencia para el seguimiento.



Considerando los valores numéricos de los parámetros del sistema:  $a = 78.4$ ,  $b = 1.08$  y  $c = 198$ ; se diseñaron los reguladores para cada uno de los modelos. Además se calculó la ganancia (común a los cinco modelos) para un esquema simple de seguimiento de referencia. Por ensayo y error se ajustaron los parámetros  $t_s = 0.15$  s y  $M_p = 5\%$ , con los cuales se obtienen los polos deseados (de lazo cerrado)  $s_{1,2} = -26.7 \pm j27.2$ , que son las raíces del polinomio



característico  $\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ . Con base en los modelos linealizados de segundo orden y los parámetros deseados, las ganancias obtenidas son las siguientes

$$K_1 = -[1416.3 \ 49.4] \quad (3.11a)$$

$$K_2 = -[1390 \ 49.4] \quad (3.11b)$$

$$K_3 = -[1343.8 \ 49.4] \quad (3.11c)$$

$$K_4 = -[1328.3 \ 49.4] \quad (3.11d)$$

$$K_5 = -[1343.7 \ 49.4] \quad (3.11e)$$

La ganancia de seguimiento obtenida para todos los modelos tiene el valor  $G = -1343.7$  y se calculó mediante la expresión

$$G = \frac{1}{C(A - BK)^{-1}B}$$

Los reguladores locales tienen las expresiones  $u_i = -K_i\hat{x}$  y la señal de control global queda definida como se indicó en (3.10) pero con la inclusión del seguimiento simple resulta la expresión (3.12)

$$u = G\theta_{ref}(t) - (\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 + \mu_3 K_3 + \mu_4 K_4 + \mu_5 K_5)\hat{x} \quad (3.12)$$

Este regulador actúa sobre las variables  $x_1 = \theta_1$ ,  $x_2 = \dot{\theta}_1$ . El tercer estado,  $x_3 = \dot{\theta}_2$  es la velocidad de la rueda. Si esta variable no se realimenta, se corre el riesgo de tener una aceleración progresiva de la rapidez de giro de la rueda de reacción. En las oscilaciones para hacer subir al péndulo, la velocidad de la rueda también es oscilante. Por tanto, el problema de las altas velocidades debe atenderse cuando la barra ha alcanzado la posición invertida. Para esto, al detectar que el ángulo  $\theta_1$  es cercano a cero, se cambia el controlador por un regulador local que realimenta los tres estados,  $u_{up} = -K_{up}x$ , donde  $x$  es el vector de estados completo y  $K_{up} = [K_{up1} \ K_{up2} \ K_{up3}]$  es el vector de ganancias de dicho regulador. La señal de control global a usar se presenta en (3.13)

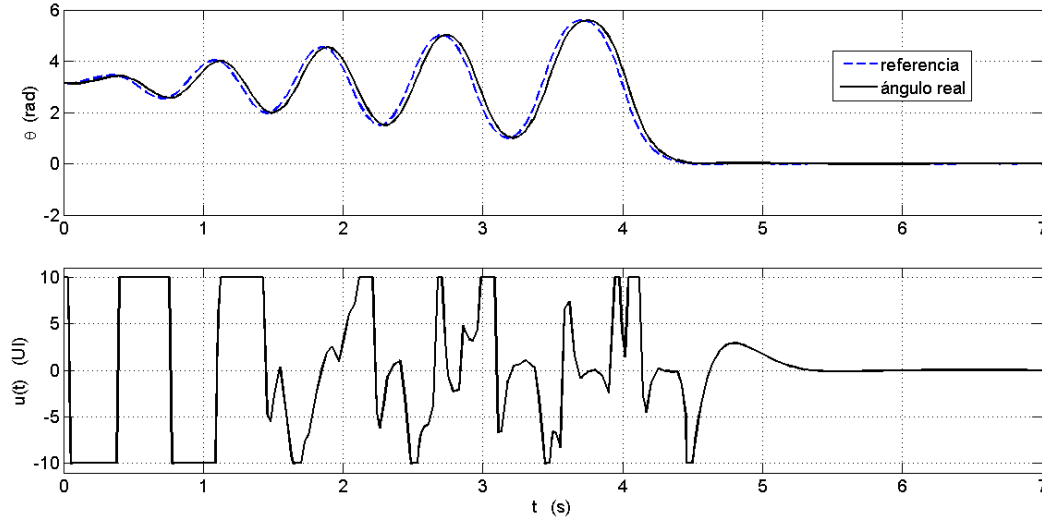
$$u = \begin{cases} G\theta_{ref} - \sum_{i=1}^5 \mu_i K_i \hat{x}, & \theta_1 > \epsilon \\ -K_{up}x, & \theta_1 \leq \epsilon \end{cases} \quad (3.13)$$

El ángulo  $\epsilon$  debe ser menor a ocho grados con el fin de evitar cambios bruscos en la señal de control en el instante de la conmutación. Para el regulador lineal en la posición invertida se definieron los polos de lazo cerrado  $s_{1,2} = -4 \pm j4.1$  y  $s_3 = -11.4$ . Con estos polos y el modelo linealizado (tradicional) alrededor de  $\theta_1 = 0$  se obtuvieron las ganancias

$$K_{up} = -[187.5 \ 22.4 \ 0.024]$$

Los resultados de la simulación se presentan en la figura 3.7. Se observa que hay saturación en la señal de control pero aun así se logra el seguimiento de

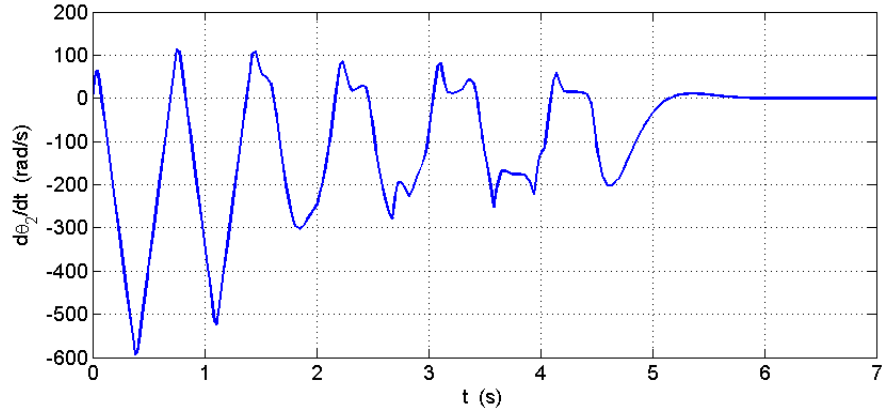
Fig. 3.7: Resultados del esquema de seguimiento descrito.



la referencia con un grado de desfase aceptable. Debido a dicha saturación, resulta muy difícil reducir el tiempo de subida a un valor menor al obtenido ( $t_s \approx 4.5$  s).

La gráfica de la velocidad de la rueda durante el proceso de seguimiento se muestra en la figura 3.8, donde se observa que se mantiene en los límites establecidos según el fabricante del motor ( $\dot{\theta}_{2max} = 875.9$  rad/s) y además es llevada a cero cuando el péndulo alcanza la posición invertida.

Fig. 3.8: Velocidad de la rueda durante el seguimiento.



# 4

## Conclusiones

El modelo matemático obtenido para el sistema y los valores numéricos de sus parámetros, pudieron ser verificados con una prueba de oscilaciones alrededor del punto de equilibrio estable, así como con el controlador por linealización entrada-estados que se implementó sobre la planta real.

Se obtuvieron resultados satisfactorios tanto en la regulación como en el seguimiento de referencia para el controlador con el esquema de linealización parcial por realimentación. A pesar de la saturación en la señal de control, el ángulo de la barra se ajustó bastante bien a la trayectoria diseñada (figura 2.3), con un tiempo de subida comparable con el obtenido por los autores en [1] ( $t_{up} \approx 4.5s$ ). El error de seguimiento  $e(t)$  se mantuvo por debajo de 0.1rad.

La linealización por realimentación permitió diseñar controladores con base en las técnicas lineales clásicas, asignando parámetros típicos de respuesta como máximo sobreimpulso y tiempo de establecimiento ( $t_s = 0.3s$  y  $M_p = 3\%$  en el diseño propuesto). La señal de control obtenida cumple una doble tarea: generar un modelo de lazo cerrado lineal y seguir el comando de referencia.

La aproximación difusa T-S de la no linealidad sinusoidal en el modelo usando el enfoque propuesto en [13], generó resultados satisfactorios aun cuando se tomaron pocos puntos de operación. El controlador difuso propuesto permitió tanto la regulación como el seguimiento de referencia en un tiempo comparable

con el obtenido usando linealización por realimentación ( $t_{up} \approx 4.5s$ ).

Comparando las figuras 2.3 y 3.7 se observa que con linealización por realimentación se logró un mejor seguimiento ( $|e(t)| < 0.1rad$ ) en comparación con el control difuso ( $|e(t)| < 0.21rad$ ). Esto se debe a que la primera propuesta usa el modelo no lineal del sistema (modelo *exacto*), mientras que la segunda se basa en linealizaciones alrededor de diferentes puntos de operación.

En ambas propuestas de seguimiento (Linealización por realimentación y control difuso), no fue posible lograr tiempos de subida menores a 4.5s para el péndulo debido a las limitaciones en la señal de control (el voltaje aplicado al motor estaba restringido al rango  $|v_m(t)| \leq 24 V$ , equivalente a una señal de control normalizada en el rango  $|u(t)| \leq 10 UI$ ).

# Bibliografía

- [1] ASTROM, K. J., SPONG, M. W., AND BLOCK, D. J. The reaction wheel pendulum, 2001.
- [2] BEGOVICH, O., SANCHEZ, E. N., AND MALDONADO, M. Takagi-sugeno fuzzy scheme for real-time trajectory tracking of an underactuated robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 10, 1 (2002), 14–20.
- [3] GIRALDO B., D., AND GIRALDO S., E. *Teoría de Control Análogo*. Universidad Tecnológica de Pereira, 2010.
- [4] GUTIÉRREZ FRÍAS, O. E. *Diseño de Controladores para Sistemas Subactuados del Tipo Péndulo Invertido*. PhD thesis, Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 2009.
- [5] HERNÁNDEZ, V. M., AND SIRA-RAMÍREZ, H. Generalized pi control for swing up and balancing the inerthia wheel pendulum. In *Proceedings of The American Control Conference, Denver, Colorado, june 4-6*. (2003).
- [6] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*, 3 ed., vol. 1. Springer, 1995.
- [7] LI, P. Y. Feedback linearization and robust sliding mode control. Lecture Notes, 2002. Department of Mechanical Engineering, University of Minnesota.
- [8] MECHATRONICS SYSTEMS INC. *Mechatronics Control Kit User's Manual*, 2001.
- [9] MONTROYA G., O. D., ET AL. Control global del péndulo con rueda de reacción mediante regulación de energía y linealización extendida de las variables de estado. *Revista Tecno Lógicas* 16, 32 (2014), 33–46.
- [10] OLIFATI-SABER, R. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [11] SASTRY, S. *Nonlinear Systems. Analysis, Stability and Control*. Springer, 1999.

- 
- [12] SLOTINE, J.-J. E., AND LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall Inc., 1991.
  - [13] TANAKA, K., AND WANG, H. O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis, A LMI Approach*. John Wiley Sons, Inc., 2001.
  - [14] TERREL, W. J. Some fundamental control theory I: Controllability, observability and duality. *The American Mathematical Monthly* 106, 8 (1999), 705–719.
  - [15] TERREL, W. J. Some fundamental control theory II: Feedback linearization of single input nonlinear systems. *The American Mathematical Monthly* 106, 9 (1999), 812–828.